対称性が使えない場合の三角関数の数列の和

方針：積和の公式を利用する。

例題 1

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \ (0 \leq \theta < 2\pi)$ 　を求めよ。

例題 2

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \ (0 \leq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

例題 1 の解

（ｉ） $\theta=0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=0$$

（ⅱ） $0<\theta<2\pi$ のとき

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot S_n&=\sum_{k=1}^{n}\sin\alpha\cdot\sin k\theta\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\cos(k\theta-\alpha)-\cos(k\theta+\alpha)\}\\&=\frac{1}{2}[\{\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)\}+\cdots\\&\quad+\{\cos(k\theta-\alpha)-\cos(k\theta+\alpha)\}+\{\cos((k+1)\theta-\alpha)-\cos((k+1)\theta+\alpha)\}+\cdots\\&\quad+\{\cos(n\theta-\alpha)-\cos(n\theta+\alpha)\}]\end{aligned}$$

ここで， $k\theta+\alpha=(k+1)\theta-\alpha$ とすると， $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ ・・・①

また， $\sin\alpha\cdot S_n=\dfrac{1}{2}\{\cos(\theta-\alpha)-\cos(n\theta+\alpha)\}$ ・・・②

①，②および $0<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より， $S_n=\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

あるいは， $\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta=2\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cdot\sin\dfrac{n}{2}\theta$ より， $S_n=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cdot\sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

（ｉ），（ⅱ） より，

$\theta=0$ のとき， $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=0$

$0<\theta<2\pi$ ののとき， $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cdot\sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

例題 2 の解

（ⅰ） $\theta=0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=n$$

（ⅱ） $0<\theta<2\pi$ のとき

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ とおくと，

$$\sin\beta\cdot T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\cdot\sin\beta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\sin(k\theta+\beta)-\sin(k\theta-\beta)\}$$

ここで，$k\theta-\beta=(k+1)\theta+\beta$ とすると，$\beta=-\dfrac{\theta}{2}$ ・・・③

また，$\sin\beta\cdot T_n=\dfrac{1}{2}\{\sin(\theta+\beta)-\sin(n\theta-\beta)\}$ ・・・④

③，④および $0<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ より，

$$T_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \text{ または } T_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cdot\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

（ⅰ），（ⅱ）より，

$\theta=0$ のとき，$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=n$

$0<\theta<2\pi$ ののとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cdot\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

入試問題への応用

自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2$ を求めよ。

2006　和歌山県立医科大学

解

$$\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n-1}\left(1+\cos\frac{k\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{12n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n-1}\cos\frac{k\pi}{6}$$
$$=\frac{12n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}-\cos\frac{12n\pi}{6}\right)$$
$$=6n-1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}$$

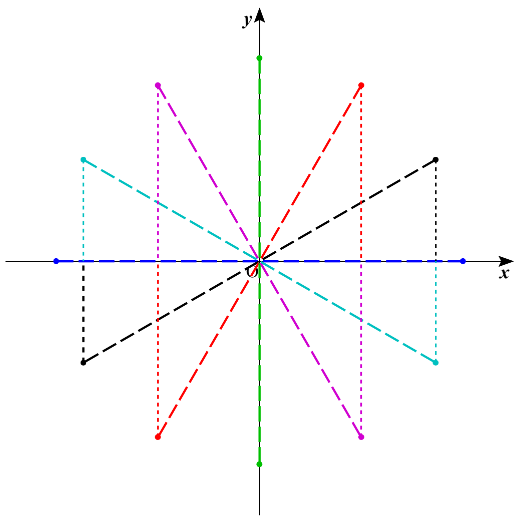
ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}$ を求める。

求め方 **1**：対称性を利用

$$\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12}{6}\pi\right)+\cdots$$
$$+\left(\cos\frac{12m-11}{6}\pi+\cos\frac{12m-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12m}{6}\pi\right)+\cdots$$
$$+\left(\cos\frac{12n-11}{6}\pi+\cos\frac{12n-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12n}{6}\pi\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{12m-11}{6}\pi+\cos\frac{12m-10}{6}\pi+\cdots+\cos\frac{12m}{6}\pi\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\left[\cos\left\{2(m-1)+\frac{\pi}{6}\right\}+\cos\left\{2(m-1)+\frac{2}{6}\pi\right\}+\cdots+\cos\left\{2(m-1)+\frac{12}{6}\pi\right\}\right]$$
$$=0$$

原点に関して対称な点が 6 組できるので，

$$\cos\left\{2(m-1)+\frac{\pi}{6}\right\}+\cos\left\{2(m-1)+\frac{2}{6}\pi\right\}+\cdots+\cos\left\{2(m-1)+\frac{12}{6}\pi\right\}=0$$



求め方 **2**：積和の公式を利用

$S_n = \sum_{k=1}^{12n} \cos\frac{k\pi}{6}$ とおくと，

$$\sin\alpha \cdot S_n = \sum_{k=1}^{12n} \cos\frac{k\pi}{6} \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12n}\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{k\pi}{6}-\alpha\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\cdots\right.$$
$$+\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{k\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\left\{\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{6}-\alpha\right)\right\}+\cdots$$
$$\left.+\left\{\sin\left(\frac{12n\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{12\pi}{6}-\alpha\right)\right\}\right]$$

ここで，$\frac{k\pi}{6}-\alpha = \frac{(k+1)}{6}+\alpha$ とすると，$\alpha = -\frac{\pi}{12}$ ・・・①

また，$\sin\alpha\cdot S_n = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{12n\pi}{6}-\alpha\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\alpha\right\} \quad ・・・②$$

①，②より，

$$-\sin\frac{\pi}{12}\cdot S_n = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=0$$

これと $\sin\frac{\pi}{12}\neq 0$ より，$S_n = 0$

よって，$\sum_{k=1}^{12n}\cos\frac{k\pi}{6} = 0$

以上より，

$$\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2 = 6n-1 \quad ・・・(答)$$